Varianta 029

Subiectul I

a) 1. b) m=-12. c) (-3,2), (3,-2). d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$. e) $2\sqrt{2}$. f) Re $z=\frac{1}{5}$.

Subiectul II

1. a) 231. b) $\frac{3}{19}$. c) 6. d) 10. e) -9.

b) f'(x)=$\frac{2x}{(x^2+1)^2}$. b) $f(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$. c) y=1 asimptota orizontala. d) $\frac{1}{2}$. e) $1-\frac{\pi}{4}$.

Subiectul III

a) x,y $\in H_n \Rightarrow \exists k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ astfel incat x=$\frac{k_1}{n!}$, y=$\frac{k_2}{n!}$. Deci x+y=$\frac{k_1+k_2}{n!}$, $k_1+k_2 \in \mathbf{Z}$.

b) x$\in$ H_n $\Rightarrow$x=$\frac{k}{n!}$ $\Rightarrow$-x=$\frac{-k}{n!} \in H_n$.

c) Fie x$\in H_n \Rightarrow \exists k \in \mathbf{Z}$ astfel incat x=$\frac{k}{n!} = \frac{k(n+1)\dots p}{n!(n+1)\dots p} = \frac{t}{p!} \in H_p$ cum x a fost ales arbitrar, rezulta ca $H_n \subset H_p$.

d)Fie r=$\frac{p}{n} = \frac{p\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n} = \frac{p\cdot 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{n!} = \frac{t}{n!} \in H_n$.

e) $\frac{1}{n!} \in$ G si G subgrup implica $\frac{1}{n!}+\cdots+\frac{1}{n!} \in$ G Fie x$\in H_n$. Oricare ar fi k$\in \mathbf{Z}$ avem $\frac{k}{n!} = \pm\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \in G \Rightarrow H_n \subset G$.

f) H subgrup al lui$\mathbf{Q} \Rightarrow H \subseteq \mathbf{Q}$. Aratam că $\mathbf{Q} \subseteq$H. Fie r=$\frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \exists$n$\in$ A, n$\geq$q a.i. $\frac{1}{n!} \in$ H.

Rezulta ca r=$\frac{p}{q} = \frac{p\cdot\frac{n!}{q}}{n!} \in$ H.

g) $\mathbf{Q}=G_1 \bigcup G_2 \bigcup \ldots \bigcup G_{2007} \Rightarrow G_i \subseteq \mathbf{Q}, \forall$ i$\in$ {1,2,…,2007}. Vom arata că există i$\in$ {1,2,…,2007} a.i. $\mathbf{Q} \subset G_1$.

Fie A=$\left\{\frac{1}{n!}\middle| n \in N^*\right\} \subset \mathbf{Q}$. Există i$\in$ {1,2,…,2007} astfel încat $A \bigcap G_i$ este infinită.

Există o infinitate de numere n pentru care $\frac{1}{n!} \in G_i$. Atunci din f) rezultă $\mathbf{Q}=G_i$.

Subiectul IV

a) F'(x)=f(x), $\forall$ x$\in$ **R**.
b) Evident pe baza periodicitatii functiei cos.
c) Din a) obtinem F'(x)$\geq$0, $\forall$ x$\in$ R, deci F crescatoare pe **R**.

Din b) obtinem F periodica, de unde folosind proprietatea enuntata obtinem ca F constanta.

d) $S(p,q)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(p-q)x-\cos(p+q)x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-q}\sin(p-q)x-\frac{1}{p+q}\sin(p+q)x\right)\Big|_0^{2\pi}=0,$

pentru $p\neq q$

e) $S(p,p)=\int_0^{2\pi}\sin^2 px\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2px)dx=\pi$.

f) Din c) obtinem ca F constanta $\Rightarrow$ f(x)=F'(x)=0, $\forall$ x$\in$ **R**.

Deci $a_1\sin x+a_2\sin 2x+\ldots+a_n\sin nx=0$

Inmultind aceasta egalitate cu sin ix, i=$\overline{1,n}$ si integrand de la 0 la 2π, pe baza punctelor d) si e) obtinem $a_i\pi=0$, deci $a_i=0$, $\forall$ i=$\overline{1,n}$.

g) $\int_0^{2\pi} f^2(x)dx=0\Rightarrow\int_0^{2\pi}(a_1^2\sin^2 x+\ldots+a_n^2\sin^2 nx)dx+2\int_0^{2\pi}\sum_{i<j}a_i a_j\sin ix\sin jxdx$

Din d) si e) obtinem $a_1^2\pi+\ldots+a_n^2\pi=0\Rightarrow a_1^2=a_2^2=\ldots=a_n^2=0\Rightarrow a_1=a_2=\ldots a_n=0$.